# ÜBER DEN DIDAKTISCHEN WERT STOCHASTISCHER PARADOXA

Hans-J. Bentz, Johannesburg*

## Abstract

While solving stochastical problems one often notices a certain discrepancy between the intuitive reasoning of the person involved, and the "objective" causes given by the mathematical theory. So, the paths to follow in either direction will usually turn out to be different ones and will not always lead to the same final answer.
One has to look for the deeper roots of this phenomenon. Among our naturally given and developed senses the stochastical sense (if existent) seems to be the poorest. We have the greatest difficulties to grasp the origins and effects of chance and randomness.
This is reflected also in the history of probability where a number of problems and paradoxical examples are reported which support the suspicion that stochastics is a rather exceptional science even within the mathematical fields.
I shall introduce and discuss a collection of problems of that kind, i.e. problems which carry certain counterintuitive aspects. My objections here are manifold. First of all, the discussion of such problems, especially in the classroom, should help *to clarify ambiguous stochastical situations*, *to understand basic concepts in this field*, *to interpret formulations and results*.
Then, we, the teachers and professionals, can use them to test our own intuitive level of understanding.
Finally, as those "paradoxes" and teasers have an entertaining aspect as well, we should make use of this to increase the motivation of the students.

## 1. Einleitung

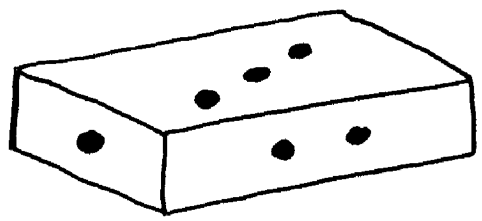
Beim Lösen stochastischer Probleme beobachtet man häufig ein Auseinanderklaffen der intuitiven Begründung durch den Schüler und der 'objektiven', von der Theorie gegebenen Vorschrift. So ist es nicht verwunderlich, wenn das Einschlagen der bezüglichen Lösungswege oft zu gänzlich verschiedenen Antworten führt. Zu Recht erstaunt dürfen wir freilich sein, wenn wir erfahren müssen, dass auch ein wiederholtes Diskutieren der 'objektiven' Lehrbuch-Strategie viel zu selten die subjektive Einschätzung nachhaltig zu ändern vermag.

---
* Ab Wintersemester 1985/86 ist die Adresse des Autors wieder:
*FB Mathematik/Informatik, Universität Osnabrück, D-4500 OSNABRÜCK.*

Natürlich interessieren wir uns für die tieferen Ursachen dieses Phänomens. Ist es unser *stochastischer Sinn* ? Falls er überhaupt existiert, so ist er - im Vergleich etwa mit anderen natürlichen Gaben - entschieden unterentwickelt. Haben wir doch die größten Schwierigkeiten, die Eigenschaften und Wirkungen des Zufalls und seiner Erscheinungen richtig einzuschätzen. Ein einfaches Beispiel mag dies erläutern.

Ohne Zögern nehmen wir beim gewöhnlichen Würfel eine Gleichverteilung der Ausgänge 1 bis 6 an und arbeiten damit (so mancher Kurs in Wahrscheinlichkeitsrechnung ist darauf gestützt). Wir berufen uns dabei auf die physikalische Symmetrie dieses Körpers. Wie aber sehen die Wahrscheinlichkeiten bei einer Streichholzschachtel aus ?

Obgleich auch hier ein stark symmetrisches Objekt vorliegt, versagt unsere Intuition allzuleicht. Wer hätte erwartet, daß bei 100 Würfen einer leeren Schachtel diese 98 mal



auf der Boden- oder Deck-Fläche, 2 mal auf den Reibe-Flächen und garnicht auf den kleinen Flächen landet ? (Bei einer vollen Schachtel waren die entsprechenden Zahlen bei meinem Experiment 94, 6, 0).

Es scheint, als ob die Stochastik eine ziemlich eigentümliche Wissenschaft ist, selbst innerhalb der mathematischen Disziplinen. Ein wenig spiegelt sich dies auch in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung wider, wo wir eine schöne Anzahl von 'Täuschungen' und Paradoxien überliefert finden.

Ich möchte eine Auswahl von Problemen dieses Typs - in alten und neuen Gewändern - vorstellen und zeigen, daß deren Diskussion hilft z.B. unklare stochastische Situationen zu analysieren, grundlegende Begriffe in diesem Gebiet besser zu verstehen, Formulierungen und Resultate besser interpretieren zu können, die stochastische Intuition zuverlässiger zu schulen.

Der im Titel erwähnte Begriff "Paradoxa" sollte nicht zu eng gesehen werden, sondern erstreckt sich hier recht weit auf allerlei Beispielaufgaben. Gemeinsam sind ihnen jedoch gewisse stochastische Aspekte, die unsere Intuition leicht in die Irre führen.

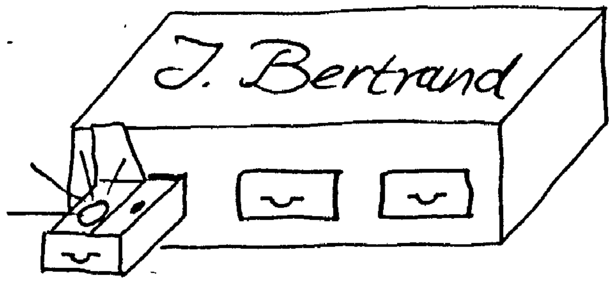
Eine meiner Absichten ist natürlich auch, den Lehrer zu ermuntern, derartige Aufgaben im Klassenzimmer zu diskutieren. Ich habe gesehen, dass sie ausserordentlich wertvoll sind und sogar einen tragenden Teil eines Stochastik-Kurses bilden konnen.

Schliesslich haben *Paradoxa*, *Täuschungen*, Aufgaben mit *Fallen* stets auch einen unterhaltenden Wert, also eine kostenlose Beigabe, die wir nutzen können, um die Motivation unserer Schüler und Studenten zu heben.

## 2. Erste Beispielserie: Offene und versteckte Lotterien

Das Bertrandsche Kästchenproblem

*Auf drei Kästchen mit je zwei Abteilungen werden drei Gold- und drei Silbermünzen so verteilt, daß in einem Kästchen Gold/Silber, in den beiden andern Kästchen Gold/Gold und Silber/Silber zu liegen kommt. Jemand wählt zufällig eines der drei Kästchen, öffnet eine der beiden Abteilungen und findet Gold. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der anderen Abteilung dieses Kästchens ebenfalls Gold liegt ?*



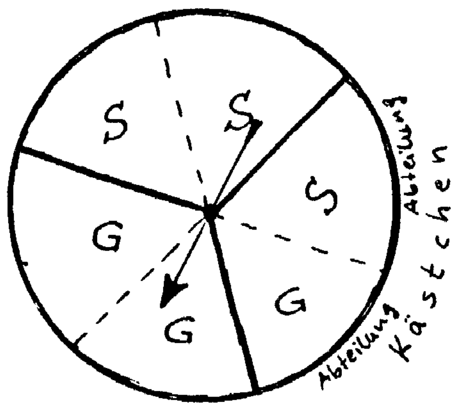

Beim ersten Hinsehen scheint die Antwort einfach zu sein. Da die eine Abteilung Gold enthält, ist ausgeschlossen, das Kästchen mit Silber/Silber vor sich zu haben. Infolgedessen liegt es nahe, bei den beiden verbleibenden Möglichkeiten Gold/Gold oder Gold/Silber mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 auf Gold zu tippen.

Viele Schüler, die zum ersten Mal Bekanntschaft mit diesem Problemtyp machen, geben auch diese Antwort. Leider ist sie falsch. Der korrekte Wert ist 2/3.

So alt dieses Problem ist, so unterschiedlich sind die Erklärungsversuche. Ich neige zu folgender Erläuterung:

Es findet eine erste "Lotterie" statt beim zufälligen Auswählen eines der drei Kästchen. Eine zweite Lotterie besteht im Wählen einer Abteilung. Ist bei der ersten noch alles symmetrisch, so ändern sich bei der zweiten die Gewichte. Im Falle des Gold/Gold Kästchens nämlich, sieht man stets Gold, egal wie gewählt war. Hingegen findet man im Falle des gemischten Kästchens nur in der Hälfte der Fälle Gold. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das vorliegende Gold aus dem Gold/Gold Kästchen ist, gerade doppelt so groß wie jene, daß es aus dem gemischten Kästchen ist.

Eine Veranschaulichung dieser Sachlage kann leicht mit Hilfe eines passenden Glücksrades gegeben werden. (Man darf auch in der Klasse nicht auf diese Variation verzichten.)




Wir drehen das Glücksrad. Der Schüler kennt wohl die Einteilung darauf, soll aber keine Einsicht haben, wo der Zeiger zum Stillstand gekommen ist. Er bekommt nur die Information: *Der Zeiger steht auf einem der drei Gold-Felder*.

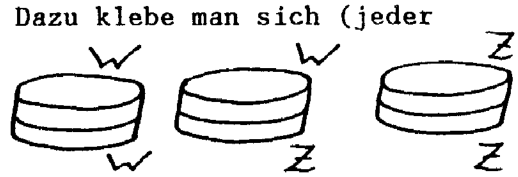
Das entspricht der obigen Information: *Man sieht Gold*.

Die Ausgangsfrage heißt hier: Wir wissen 'Zeiger steht auf Gold', wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß er in jenem der drei fettumrandeten Sektoren stehengeblieben ist, der beide Gold enthält ? Die Antwort ist jetzt einfacher. Bei zwei der drei Gold-Sektoren sind wir im Kästchen Gold/Gold, bei einem sind wir im gemischten, Antwort also: 2/3.

Eine ähnliche Aufgabe, bei der die korrekte Antwort 1/2 ist, besteht in folgender Variante, die ich nur kurz erwähnen möchte:

Wir nehmen wieder die Bertrand-Kästchen, gefüllt wie oben und wählen eines aus. Jemand schaut fur uns in **beide** Abteilungen und teilt uns mit: *In wenigstens einer ist ein Gold*. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, das Kästchen Gold/Gold vor sich zu haben ? (Man spiele dies auch auf dem Glücksrad.)

Nun ist es eine alte Weisheit, daß **Tun** besser ist als nur davon zu erzählen, und so sollte der Lehrer derartige Probleme so *handgreiflich* wie möglich in der Klasse präsentieren. Zwar wäre gegenwärtig wegen des niederen Goldpreises die Füllung der Bertand-Kästchen viel leichter möglich als zu anderen Zeiten, doch macht die Realisierung der Ausstattung einigen Aufwand, zu groß für eine kurze Episode des Unterrichts. Glücklicherweise gibt es aber ein völlig analoges Modell, mit dem sich mühelos der gleiche Zweck verfolgen läßt. Dazu klebe man sich (jeder Schüler kann das tun) sechs gleichartige Münzen paarweise so zusammen, daß einmal Wappen/Zahl, einmal Zahl/Zahl und einmal Wappen/Wappen zu sehen ist.




Nun werden die drei Spielmünzen in eine Tasche gesteckt, dann eine züfallig herausgenommen und schnell auf den Tisch gelegt. Es ist (z.B.) Wappen zu sehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auf der Unterseite auch Wappen liegt ?

Ich habe dieses Problem gerne in folgender Form vorgestellt:

Die Klasse spielt ein Spiel gegen den Lehrer. Die Spielmünzen sind wie beschrieben gefertigt, beide Parteien kennen deren Aussehen. Es wird eine Münze zufällig aus der Tasche genommen, auf den Tisch gelegt, auf die Unterseite getippt, nachgesehen, das Resultat (also "korrekt getippt", "falsch getippt") notiert, die Münze wieder zurückgelegt. Das wird z.B. 20 mal durchgeführt. Im ersten Durchlauf zieht der Lehrer, und die Klasse tippt. Es ergibt sich die Gewinn/Verluststatistik der Klasse. Danach führt die Klasse 20 Ziehungen aus, und der Lehrer tippt. Schließlich werden die Statistiken verglichen, die bessere gewinnt.
Da die Klasse meist ohne Bevorzugung Wappen oder Zahl rät, ist die Erfolgsquote 1/2. Der Lehrer hingegen wird der bestmöglichen Strategie folgen und stets den Ausgang nennen, der oben liegt (den man also sehen kann) und daher eine Erfolgsquote von 2/3 erwarten können. Die Suche nach der Erklärung, bringt der Klasse von selbst die Einsicht in die Güte der Strategien (meist noch während des Spiels) und damit die Auflösung der anfänglichen Überraschung.

Ein sehr ähnlicher Aufgabentyp, in dem auch zwei Lotterien vorliegen, ist durch die folgende Beschreibung und Frage gegeben:

*Herr Schmidt ist Vater zweier Kinder. Wir treffen ihn in der Stadt mit einem Jungen, den er als seinen Sohn vorstellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sein zweites Kind, das daheim wartet, ebenfalls ein Junge ist ?*

Meist sehen die Antworten und Begründungen so aus:

a) Da Jungen- und Mädchengeburten praktisch gleichwahrscheinlich und unabhängig geschehen, nützt die gegebene Information überhaupt nichts, und die Wahrscheinlichkeit ist 1/2.

b) Wir wissen, daß Familien mit zwei Kindern nur so aussehehn können:

**J J , J M , M J , M M.**

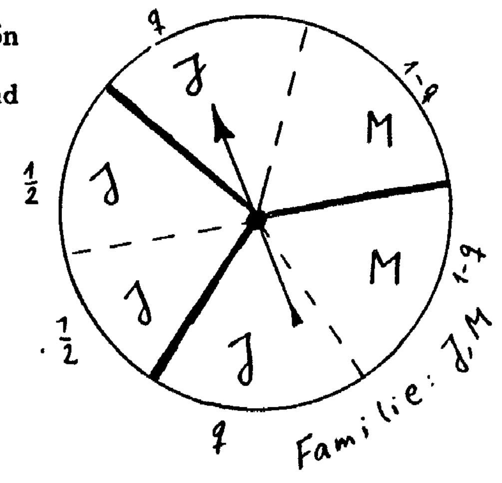
Nach der Vorstellung des Sohnes reduziert sich dies auf

**J J , J M , M J.**

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 1/3.

Was meint die Klasse dazu ? Gibt es noch andere sinnvolle Antworten ?
Die Aufklärung, wieder mit Hilfe der Lotterien, verläuft wie folgt. Eine Lotterie besteht in der durch die Natur geregelten Wahl Junge oder Mädchen bei der Geburt, wir dürfen dieses grob als gleichwahrscheinlich ansehen. Eine zweite besteht in der Auswahl des Vaters daheim, seinen Begleiter betreffend. Wirft Herr Schmidt dazu eine Münze, so wird die korrekte Antwort auf die Ausgangsfrage 1/2 lauten. Bevorzugt er aber z.B. stets einen Jungen als Begleiter, so wird die Antwort 1/3 sein. Wüßten wir, daß er stets ein Mädchen mitnimmt, sofern er eines hat, so finden wir die Wahrscheinlichkeit 1 (wir sehen ihn ja mit einem Jungen). Etc.

Auch hier kann man sehr schön mit einem passenden Glücksrad veranschaulichen.




6

Die Wahrscheinlichkeit, welche die private Lotterie des Herrn Schmidt charakterisiert, ist am Rand durch q bzw. 1-q vermerkt. Nun spielen wir das Treffen des "Herrn Schmidt mit Sohn". Der Zeiger dreht sich, wir bekommen die Information, er ist in einem Feld 'Junge' stehengebliegen. Wir fragen **jetzt** nach der Wahrscheinlichkeit, daß es eines der beiden ist, das für die Familie mit Junge/Junge steht. Die direkte Rechnung $(1/2 + 1/2)/(1/2 + 1/2 + q + q)$ ergibt $1/(1 + 2q)$. Das entspricht genau der Regel "günstige dividiert durch mögliche Fälle".

Ähnlich der Variante beim Kästchenproblem, gibt es auch hier eine Aufgabe, bei der die zweite Lotterie ausgeschaltet wird. Man fragt einen Vater von zwei Kindern, ob er wenigstens einen Sohn hat. Antwortet er mit ja, so interessiert uns die Wahrscheinlichkeit für zwei Jungen in seiner Familie. Nun ist die korrekte Antwort 1/3.

Andere Einkleidungen dieses Problemtyps und Varianten:

1. Wir fragen einen Jungen (ein Mädchen) aus der Klasse, ob er (es) zu einer Familie mit genau zwei Kindern gehört. Falls ja, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er einen Bruder hat (es eine Schwester hat) ?

2. Die Klasse fertigt drei Karten an von denen eine auf beiden Seiten rot, eine auf beiden Seiten schwarz und eine beide Farben trägt. Wir geben die Karten in einen Hut. Dann wird eine zufällig herausgenommen und auf den Tisch gelegt. Wir sehen schwarz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auch die andere Seite schwarz ist ?

3. Aus einem gewöhnlichen Kartenspiel nehmen wir die beiden roten Asse und die beiden roten 7 heraus. Diese vier Karten werden gemischt. Ein Schüler darf zwei davon ziehen.
a) Wir erfahren, daß wenigstens ein As dabei ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er beide Asse hat ?
b) Wir dürfen uns eine der beiden Karten des Schülers ziehen und sehen ein As. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß die beim Schüler verbliebene Karte auch ein As ist ?
c) Wir dürfen uns eine der beiden Karten des Schülers ziehen und sehen Karo-As. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die beim Schüler verblieben Karte Herz-As ist ?

Arbeitet der Lehrer einen Katalog solcher Probleme durch, so wird er anfänglich sicher einige Verwirrung und Unsicherheit bei den Schülern feststellen; nach einiger Zeit jedoch wird die Klasse derartiges klar durchschauen und die Schüler viel mehr Vertrauen in die eigene Urteilsfähigkeit und Strategienwahl gewinnen.

## 2. Beispielserie: Modellbildung

Die mysteriöse Urne.

*Wir sitzen vor einer Urne, die endlich viele (z.B. 100) schwarze und weiße Kugeln enthält. Es wird uns versichert, daß die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, genau 1/2 sei. Können wir aus dieser Information schließen, daß die Hälfte der Kugeln in der Urne weiße sind ?*

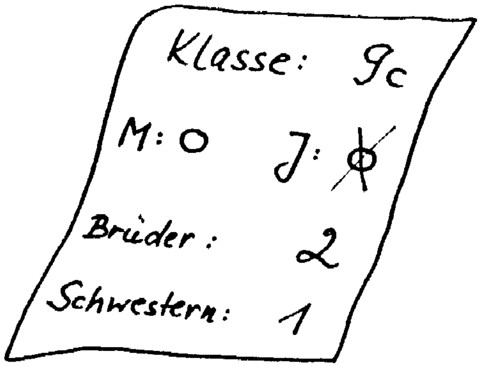
Als Antwort könnte man anführen: Wäre die Anzahl der weißen nicht gleich der der schwarzen, so müßte die Wahrscheinlichkeit von 1/2 abweichen, gemäß der Regel: "Anzahl der weißen geteilt durch Gesamtzahl". Obwohl dieser Schluß einleuchtend und mit der Intuition vereinbar ist, führt er doch zu einer falschen Einschätzung. Eine andere Einkleidung hilft vielleicht weiter:

Stellen wir uns vor, die Klasse führt 100 Münzwurfe aus und protokolliert die Ausgänge auf einem Papierstreifen. Jeder Nummer von 1 bis 100 ist dann entweder 'Wappen' oder 'Zahl' zugeordnet. Wenn der Lehrer das Protokoll nicht einsehen darf, er aber z.B. auf die Notiz bei Nr. 34 tippen soll, so wird er mit Recht davon ausgehen, daß die Wahrscheinlichkeit, dort Wappen zu finden so groß ist wie die für Zahl, also 1/2. Das gleiche gilt fur jede andere Nummer. Und doch wird hier niemand den Schluß wagen, daß das Protokoll genau 50 Wappen ausweist.

Der Zusammenhang mit der Urne liegt nahe: Die Füllung der Urne könnte ja so erfolgt sein, daß für jedes Wappen beim Münzwurf eine schwarze und sonst eine weiße Kugel hineingegeben wurde (und das 100 mal). Das Ziehen einer Kugel entspricht dem Wählen einer Nummer auf dem Streifen, die Wahrscheinlichkeit für Zahl entspricht der für weiß, also 1/2. Ebensowenig, wie 50 Wappen auf dem Papierstreifen sein *müssen*, werden wir auf 50 weiße Kugeln in der Urne schließen können.

Zusammenfassend, es ist wohl der Schluß: $\#(\circ) = \#(\bullet) \Longrightarrow p(\circ) = \frac{1}{2}$ erlaubt (und entspricht gerade der "Laplace-Definition" von Wahrscheinlichkeit).

Hingegen ist der **Umkehrschluß** aber nicht immer korrekt, seine Gültigkeit hängt von den gegebenen Informationen über das Experiment ab. Im Falle der mysteriösen Urne (und des Papierstreifens) ist die Möglichkeit 'gleiche Anzahlen' - obwohl nicht ausgeschlossen - jedenfalls nicht notwendig vorliegend.




Eine Variante dieses Fehlschlusses findet sich in der zeitgenössischen Literatur zum Statistikunterricht. Es geht dort um eine Umfrage im Klassenzimmer. Man fragt die Jungen und Mädchen getrennt nach ihren Geschwistern und sortiert nach Brüdern und Schwestern in den Familien. Es wird sich herausstellen, daß im Durchschnitt die Mädchen in der Klasse daheim mehr Brüder als Schwestern haben (und, analog, die Jungen mehr Schwestern als Brüder). Warum ?
Folgende Begründung kommt in Betracht: Da Jungen- und Mädchengeburten praktisch mit gleicher Wahrscheinlichkeit geschehen, erwartet man im Schnitt in einer Familie gleichviele Mädchen wie Jungen. Da die Mädchen, die in der Klasse den Fragebogen ausfüllen, sich nicht selbst mitzählen, wird man einen Überschuß von Brüdern feststellen.

Obgleich sich nun eine prinzipielle Übereinstimmung zu den vorher diskutierten Problemen nachweisen läßt, diskutiere ich dieses letzte gerne in der Klasse. Der Grund liegt in der damit verbundenen Frage nach einem geeigneten Modell für das "Bilden einer Schulklasse". Natürlich erwarte ich mir von der Antwort auch eine bessere Einsicht in das Ausgangsproblem.

Ein Vorschlag (dessen Grundüberlegung sich auch bei anderen Problemen verwenden läßt) sieht so aus: Wir lassen eine Münze entscheiden, wie die Population von Jungen und Mädchen aussieht. Wappen und Zahl stehen für Junge und Mädchen. Eine Serie von Würfen liefert z.B.

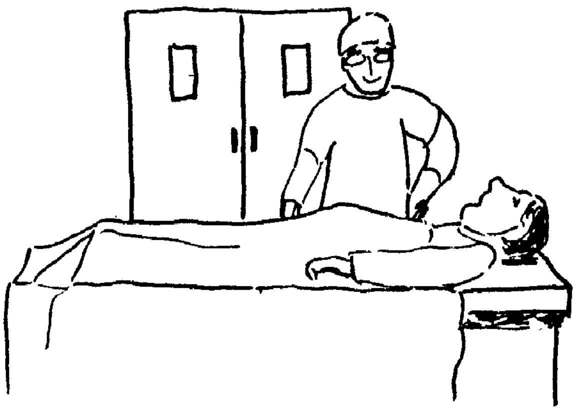
J J   M M J   M J M   M   M   M J   J M J   J J M M M   M . . . .

Hier haben wir schon gleich willkürlich in Gruppen zusammengefaßt, also "Familien" gebildet. Eine "Klasse" entsteht durch beliebiges Herausgreifen eines "Kindes" aus der Familie (ganz selten vielleicht zwei).
Wir erhalten z.B. folgende Klasse: J, M, J, M, M, M, J, J, M, ...

Jetzt lassen wir etwa das letzte Mädchen, das aus der nur unvollständig bekannten Familie "M....." kommt, aufschreiben, wieviel Brüder und Schwestern es noch hat. Können wir erwarten, daß mehr J als M genannt werden ? Falls ja, wäre das gleichbedeutend damit, daß wir bei einem Münzwurf aus der Kenntnis des ersten (oder 21.) Ausgangs auf weiter kommende schließen könnten. Kein Mensch ist dazu in der Lage und so ist auch nicht zu erwarten, daß es im Prinzip mehr Mädchen-Brüder als Mädchen-Schwestern (analog fur die Jungen) in irgendeiner nach den erklärten Regeln entstandenen Klasse geben wird.

Der Lehrer ist angehalten, selber Statistiken von seinen Klassen zu sammeln und die Praxis mit der Theorie zu vergleichen. Ich erwarte keine signifikanten Abweichungen. Natürlich muß das Material auch mit der Klasse diskutiert werden.

Ein letztes Beispiel fur diesen Typ Fehlschluß ist in der nachstehenden Abbildung gegeben. Was meint die Klasse dazu ?



"Keine Sorge! 9 von 10 Patienten sterben bei dieser Operation. Meine ersten 9 haben's nicht überlebt. Sie sind der 10te und haben daher perfekte Aussichten!"

**3. Beispielserie: Gewichtung**

Werfen von zwei Münzen.


*Zwei Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Wappen, die andere Zahl zeigt ?*

Schüler werden leicht zur Antwort 1/3 verleitet, weil sie die Mischung als gleichermaßen wahrscheinlich wie jeden der Ausgänge W/W , Z/Z sehen. Leider ist dies falsch. Das Gewicht für die Mischung ist hier gerade doppelt so groß wie für W/W oder Z/Z. Sie sehen aber ihren Irrtum sofort ein, wenn man *alle* gleichgewichtigen Ausgänge zeigt, nämlich W/W, W/Z, Z/W, Z/Z.

Fehler dieses Typs werden sehr leicht und oft gemacht, keine Zeit scheint vor ihnen gefeit zu sein. Die Geschichte der Mathematik überliefert uns aus der Mitte des 17. Jahrhunderts eine ähnliche Aufgabe, es ist als Galileis Problem bekannt.

Ein Freund Galileis fragt:

*Mit 3 Würfeln kann man 9 und 10 auf je sechs verschiedene Weisen erreichen, und doch zeigt die Erfahrung, daß 10 öfter als 9 kommt.*

Und Galilei antwortet:

*Von den $6^3$ Fällen sind 27 günstig für 10 aber nur 25 günstig für 9.*

So knapp und präzise diese Antwort ist, die Schüler in der Klasse werden diese nicht sofort finden und geben. Doch sind sie leicht imstande, durch Übertragen der Regel: *Die Mischung hat (in solchen Fällen) das größere Gewicht* das Problem zufriedenstellend zu lösen. Dazu werden einfach die sechs Zahlentripel für die Summe 9 bzw. 10 verglichen:

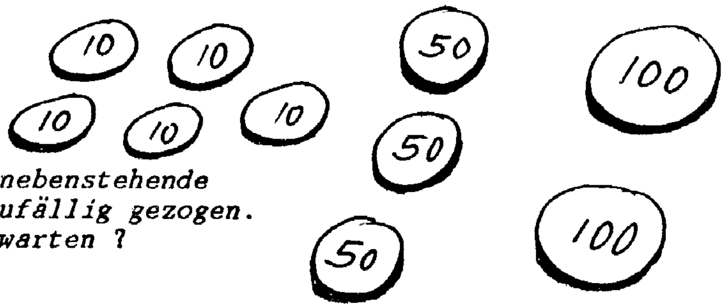
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 2 6 | 1 3 5 | 1 4 4 | 2 2 5 | 2 3 4 | 3 3 3 |
| 1 3 6 | 1 4 5 | 2 2 6 | 2 3 5 | 2 4 4 | 3 3 4 |

Die ersten beiden Paare sowie Nr. 5 von oben und Nr. 4 von unten enthalten je drei verschiedene Zahlen, sind also gleichgewichtig in ihrem Beitrag. Das dritte Paar sowie Nr. 4 von oben und Nr. 5 von unten hat je eine Zahl doppelt, zählt also ebenfalls jeweils gleich. Der einzige Unterschied besteht im Beitrag des letzten Paares. Hier sehen wir eine Mischung nur im unteren Tripel, infolgedessen ist dessen Gewicht größer als das von 3 3 3, und die Antwort liegt auf der Hand.

Anmerkung.
Die genauen Zahlen für die Wahrscheinlichkeiten sind 0,115740... und 0,125 , die Differenz ist also sehr gering. Mich wundert, daß der Freund von der "Erfahrung" spricht, die der Summe 10 den Vorzug zu geben scheint. Muß man nicht ziemlich lange spielen, um dies mit einiger Sicherheit konstatieren zu können ? Die Klasse soll mal prüfen.

## 4. Beispielserie: Abhängigkeit

Drei von zehn Münzen.




*In einer Tasche befinden sich nebenstehende 10 Münzen. Drei davon werden zufällig gezogen. Welchen Gesamtwert kann man erwarten ?*

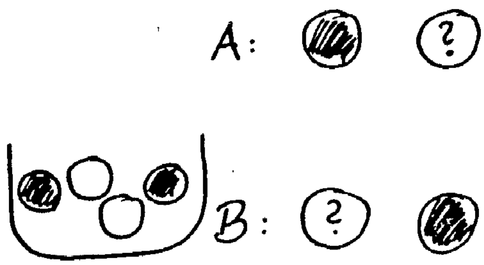
Manchmal werde ich um die zusätzliche Information gebeten, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird? Ich frage gern zurück, was einfacher zu behandeln sei? Immer wird dann erst der Fall 'mit Zurücklegen' angegangen. (Gelegentlich frage ich auch: "Macht es einen Unterschied ?")
Nun, der Fall 'mit Zurücklegen' ist einfach. Der Gesamtwert der Münzen betragt 400 (Einheiten, je nach Landeswährung), eine Münze trägt daher den 10. Teil, also 40 . Bei dreimaligem Ziehen erwarten wir 120 .
Warum zögert der Proband aber beim Fall 'ohne Zurücklegen' ? Vermutlich, weil die zweite (dritte) Münze von der erstgezogenen abhängig ist. Die Bearbeitung ist erschwert, es erscheint nämlich die komplexe Sammlung aller Möglichkeiten der Auswahl von 3 aus 10 Münzen mitsamt den unterschiedlichen Gewichten in unserem Bewußtsein. Man überblickt das in der Regel nicht.
Nun ist aber der Erwartungswert **linear**, und zwar ohne "Rücksicht" auf Abhängigkeit oder Unabhängigkeit. Infolgedessen können wir den Vorgang z.B. durch die Summe $M_1 + M_2 + M_3$ beschreiben, wobei $M_i$ für die Münze beim i. Zug steht. Der Erwartungswert liefert sofort die Antwort (in beiden Fällen).
Man muß freilich einsehen, daß $E(M_1) = E(M_2) = E(M_3)$ gilt. Das geht z.B. so: Wir ziehen eine Münze, behalten sie aber in der verschlossenen Hand. Dann ziehen wir die zweite und fragen nach deren Erwartungswert. Man sieht nun viel leichter, daß es keinen Grund gibt, diese zweite der ersten vorzuziehen, um eben einen höheren Wert zu erhalten. Die Erwartungswerte

sind also gleich. Analoges gilt für die dritte (und gälte für jede weitere) Münze.

Anmerkung
Eine Variation dieser Hilfe zur besseren Einsicht kann schon relativ früh im Unterricht auftauchen: Wir präsentieren der Klasse einen Stapel von 32 Karten, die gut gemischt sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die erste (oberste) Karte Kreuz As ist ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite, dritte, ..., letzte Karte Kreuz As ist ? Sie ist natürlich immer die gleiche, nämlich 1/32.

Aus der Fülle der in der Literatur verarbeiteten Aufgaben, bei denen in ähnlicher Weise wie oben unser Zögern bei 'Abhängigkeit' der Auslöser für die Diskussion war, möchte ich nur eine auswählen und kurz vorstellen. Die ausführliche Beschreibung des Weges zur Einsicht und Antwort kann sich z.B. an den vorstehenden Hinweisen orientieren.

*Gegeben ist eine Urne mit zwei blauen und zwei gelben Kugeln. Man zieht zweimal ohne Zurücklegen. A) Die erste ist blau. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite auch blau ist ? B) Die zweite ist blau, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die erste ebenfalls blau ist?*
(Korrekte Antwort in beiden Fällen: 1/3.)




Hier baut sich unserer Intuition wegen des allzuleicht möglichen Vermengens von **physikalischer Abhängigkeit** (die erstgezogene empfinden wir als physikalisch unabhängig von der zweiten, aber nicht umgekehrt) und **stochastischer Abhängigkeit** eine Klippe auf. Die Schüler müssen Hindernisse dieser Art unbedingt erkennen, nachempfinden, durchschauen lernen.

Zum Schluß dieses Abschnitts sei noch eine geringfügige Abänderung des 10-Münzen-Spiels (die von einem Studenten in einem meiner Seminare vorgeschlagen wurde) erwähnt.

Man zieht sechs der zehn Münzen. Dann ist klar, daß stets mindestens eine 10 in der Stichprobe ist. Bliebe es sich nicht gleich, diese 10 von Anfang an zu geben (man hat dann auch stets mindestens eine 10) und dann nur noch fünfmal zu ziehen ? Mit andern Worten, haben diese beiden Spiele den

gleichen Erwartungswert ? (Wenn ja/nein, wie kann man dies *einsichtig* machen ?).
Ich will diese reizvolle Variante nicht weiter diskutieren, sondern die Untersuchung der Klasse übertragen.

## 5. Zwei Vorschläge

Die Liste der vorgestellten Beispielaufgaben erstreckte sich auf "Lotterien", "Modellbildung", "Gewichtung", "Abhängigkeit". Sie ließe sich leicht fortsetzen. Ja, es gibt praktisch zu jedem Unterrichtsabschnitt passende Aufgaben, die kontraintuitive Aspekte haben und deren Bearbeitung im Unterricht sehr wertvoll ist. Neben dem genannten Nutzen solcher Aufgaben können wir aus der dargelegten Diskussion aber noch mehr erkennen.

Die Probleme zu den offenen und versteckten Lotterien zum Beispiel handeln im Grunde von stochastischer **Information**. Sie sollten zeigen, wie wichtig es ist, relevante stochastische Information aufspüren und von irrelevanter unterscheiden zu können. Als Hilfestellung zum Schulen dieser Fähigkeiten - und auch zum leichteren Entscheiden in schwierigen Situationen - kann ich dem Unterrichtenden und den Schülern nur empfehlen, das zu behandelnde Problem auf dem Glücksrad darzustellen. Man ist dann nämlich *gezwungen*, sämtliche gegebene Information zu berücksichtigen (andernfalls wird das Glücksrad ja nicht komplett, oder aber die Frage nicht übertragbar).

Vom Problemkomplex "Abhängigkeit" haben wir hier nur die oberste Spitze des 'Eisbergs' gesichtet. Immerhin genug, um folgenden Vorschlag, der auf eine Abänderung unserer Vorgehensweise im Klassenzimmer abzielt, bereitwilliger aufzunehmen. Er betrifft unsere Sprechweise.

Wir sollten im Stochastikunterricht nicht von *Ereignissen* sondern vielmehr von *Aussagen* (über Ereignisse, Experimentausgänge) sprechen. Beschreiben wir gewöhnlich nicht ohnehin nur Qualitäten von Ausgängen und garnicht die Ereignisse selber? Ein Beispiel mag dies belegen. Beim Würfel fragen wir z.B. nach p("4"), p("<3"), p("gerade Zahl"), p("Primzahl"), etc. Wenn man so will, liegt allen dieses Aussagen nur ein einziges physikalisches Ereignis zu Grunde, nämlich das Werfen eines Würfels. Ein spezieller Ausgang, zB. eine **4**, entscheidet über *wahr* oder *falsch* bei den Aussagen. Ist es nun nicht viel einfacher und weniger irreführend, von "Abhängigkeit", bzw. "Unabhängigkeit" von Aussagen zu sprechen, weil dies dann vom physikalischen Experiment (das der Schüler im Auge haben mag) entkoppelt ist? Und mehr noch, sind nicht von der Begriffsvorstellung her die Konzepte *Aussage*, *Negation*, *stets wahre Aussage*, *stets falsche Aussage*, *'und'-Aussagen*, *'oder'-Aussagen* leichter zu verstehen, zu verwenden, zu vergleichen, zu negieren, zu kombinieren, ja schlechthin sinnvoller als *Ereignis/Elementarereignis*, *Gegenereignis*, *sicheres Ereignis*, *unmögliches Ereignis*, *'und'-Ereignis*, *'oder'-Ereignis*, *etc.*?

Zumindest im Kapitel uber "stochastische Unabhängigkeit" würden wir uns leichter tun, da physikalische Abhängigkeiten bei Experimenten aus dem Vordergrund des Assoziationsfeldes geschoben wären.

## 6. Literaturhinweise

Eine Sammlung von Aufgaben zu verschiedenen Inhalten des Stochastikunterrichts mit einer ausführlichen Literaturliste findet man im Buch *Stochastische Problemaufgaben* von R.W.SCHOLZ, IDM-Materialien und Studien, Band 23, Bielefeld 1981.

Mehrere Beiträge zum Thema sind in MU 29, Heft 1, *Probleme im Umgang mit dem Zufall*, Stuttgart 1983, publiziert (Hrsg. H.J.BENTZ).

Eine Liste von 7 *Paradoxien der Wahrscheinlichkeitsrechnung* hat G.PFLUG im Tagungsband zum "3. Internationalen Symposium fur Didaktik der Mathematik", Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 3: Stochastik im Schulunterricht (Hrsg. W.DÖRFLER und R.FISCHER), HPT Wien 1981, S.155-163, vorgestellt und erläutert.

Eine Diskussion von Beispielen speziell zu bedingten Wahrscheinlichkeiten und über Abhängigkeit haben R.FALK und M.BAR-HILLEL durchgeführt: *Some teasers concerning conditional probabilities*, Cognition 11 (1982), 109-122; sowie: *Probabilistic dependence between events*, Two-Year College Mathematics Journal 14, (1983), 240-247.

Den Interessenten an einem alternativen Kursaufbau in Stochastik mit einer durchgängigen Verwendung des Glücksrades und die Darstellung der Grundbegriffe verweise ich auf *Wahrscheinlichkeitstheorie ohne Mengenlehre* von G.PALM und mir in mathematica didactica 3, (1980), 167-183.

ACKNOWLEDGEMENT

This project was supported by the Human Sciences Research Council, 0001 Pretoria, South Africa. Grant Nr. 15/1/3/6/708.